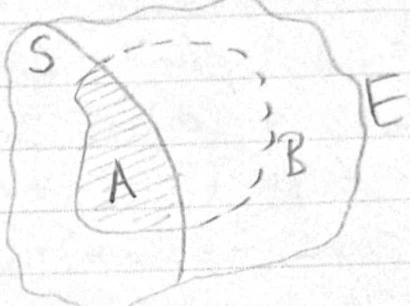
Κεφάλαιο 3ο

(E,ρ) μ.χ. $S\subseteq E$, $\rho: E\times E\to\mathbb{R}$, $S\times S\subseteq E\times E$

(S,ρ_S) μετρικός υπόχωρος του (E,ρ), $r>0$, $\alpha\in S$

$B_S(\alpha,r)=B(\alpha,r)\cap S$



Πρόταση 1

Έστω $S\subseteq E$ κ $A\subseteq S$. Τότε:

A ανοιχτό εν $S \iff (\exists B\subseteq E): B$ ανοιχτό εν E, με $A=S\cap B$

Πρόταση 2

Έστω $S\subseteq E$ κ $A\subseteq S$. Τότε A κλειστό εν $S \iff (\exists K\subseteq E): K$ κλειστό εν E με $A=S\cap K$

Απόδειξη προτ. 1

($\Longrightarrow$) Έστω A ανοιχτό εν S κ α τυχόν στοιχείο του A.
Τότε $(\exists r>0): B_S(\alpha,r)\subseteq A \Rightarrow S\cap B(\alpha,r)\subseteq A \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in A}(S\cap B(\alpha,r))\subseteq A \Rightarrow$
$S\cap\Big(\underbrace{\bigcup_{\alpha\in A}B(\alpha,r)}_{B}\Big)\subseteq A$.

Ισχύει: $A\subseteq S\cap\Big(\bigcup_{\alpha\in A}B(\alpha,r)\Big)$ Άρα $S\cap B=A$ όπου B ανοιχτό εν E

($\Longleftarrow$) Έστω $\exists$ B ανοιχτό υποσύνολο του E: $S\cap B=A$. Θ.δ.ο. A ανοιχτό εν S
Θεωρούμε α τυχόν στοιχείο του $A \Rightarrow \alpha\in B \wedge \alpha\in S$.
Επειδή B ανοιχτό εν E, θα υπάρχει $r>0$: $B(\alpha,r)\subseteq B \Rightarrow$
$S\cap B(\alpha,r)\subseteq S\cap B \Rightarrow B_S(\alpha,r)\subseteq A$. Άρα A ανοιχτό εν (S,ρ_S)

Παράδειγμα πρότασης 1

στον $(\mathbb{R},|\ |)$

$([0,+\infty),|\ |)=(S,|\ |)$

$A=[0,3)\subseteq S$

$A=[0,3)=\underbrace{[0,+\infty)}_{=S}\cap\underbrace{(-1,3)}_{=B}$. Το A στον υπόχωρο είναι ανοιχτό

Απόδειξη πρ. 2

($\Longrightarrow$) A κλειστό εν S, $A \subseteq S$

$$A = S-(S-A) = S \cap (S \cap A^c)^c \text{ με } K=(S\cap A^c)^c \text{ κλειστό}$$

($\Longleftarrow$) Αποδεικνύεται εύκολα.

Κεφάλαιο 4ο

$(E_1,\rho_1), (E_2,\rho_2)$, $f: E_1 \to E_2$, $\alpha \in E_1$

f συνεχής στο $\alpha \iff [(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in E_1): \rho_1(x,\alpha)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x),f(\alpha))<\varepsilon]$

Πρόταση

Η f είναι συνεχής στο α αν και μόνο αν ισχύει ένα απ' τα εξής:

i) $\forall$ περιοχή $U(f(\alpha))$ υπάρχει περιοχή $V(\alpha)$: $f(V(\alpha)) \subseteq U(f(\alpha))$

ii) $\forall$ περιοχή $U(f(\alpha))$ το σύνολο $f^{-1}(U(f(\alpha)))$

iii) Για κάθε ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in N}$ με $\lim\limits_{\nu\in N} x_\nu = \alpha$ ισχύει: $\lim f(x_\nu) = f(\alpha)$

Απόδειξη

ορισμός (f συνεχής) $\xRightarrow{(1)}$ (i) $\xRightarrow{(2)}$ (ii) $\xRightarrow{(3)}$ (iii) $\xRightarrow{(4)}$ ορισμός

1 Έστω $U(f(\alpha))$ τυχούσα περιοχή της $f(\alpha) \Rightarrow (\exists \varepsilon>0): B(f(\alpha),\varepsilon) \overset{(*)}{\subseteq} U(f(\alpha))$

f συνεχής στο $\alpha \Longrightarrow [(\exists\delta>0)(\forall x): \rho_1(x,\alpha)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x),f(\alpha))<\varepsilon]$

$\Longrightarrow [(\exists\delta>0)(\forall x\in B(\alpha,\delta)) \Longrightarrow f(x)\in B(f(\alpha),\varepsilon) \Longrightarrow$

$(\exists\delta>0)\, f(\underbrace{B(\alpha,\delta)}_{V(\alpha)}) \subseteq B(f(\alpha),\varepsilon) \overset{(*)}{\subseteq} U(f(\alpha))$

2 $U(f(\alpha))$ τυχούσα περιοχή της $f(\alpha) \xRightarrow{(i)} (\exists V(\alpha)): f(V(\alpha)) \subseteq U(f(\alpha)) \Longrightarrow$

$(\exists V(\alpha)): V(\alpha) \subseteq f^{-1}(f(V(\alpha))) \subseteq f^{-1}(U(f(\alpha))) \Rightarrow f^{-1}(U(f(\alpha)))$ περιοχή του α

3 Έστω $(x_\nu)_{\nu\in N}$ ακολουθία εν E_1, με $\lim x_\nu = \alpha$ και $U(f(\alpha))$ τυχούσα περιοχή του $f(\alpha)$

Άρα από το (ii) το $f^{-1}(U(f(\alpha)))$ περιοχή του α

Άρα $x_\nu \in f^{-1}(U(f(\alpha)))$ τελικά για όλα τα $\nu\in N \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_\nu) \in f(f^{-1}(U(f(\alpha))))$ τελικά για όλα τα $\nu\in N \xRightarrow{f(f^{-1}(U(f(\alpha))))\subseteq U(f(\alpha))}$

$\Rightarrow f(x_\nu) \in U(f(\alpha))$ τελικά για όλα τα $\nu\in N \Rightarrow \lim\limits_{\nu\in N} f(x_\nu) = f(\alpha)$

4 Έστω ισχύει το (iii) και η f δεν είναι συνεχής στο α. Τότε:

$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in E_1): \rho_1(x,\alpha)<\delta \wedge \rho(f(x),f(\alpha)) \geq \varepsilon$. Έστω $\delta = \frac{1}{\nu}$, $\nu\in N$.

Παίρνω $A_\nu = \{x\in E_1 : \rho_1(x,\alpha)<\frac{1}{\nu} \wedge \rho_2(f(x),f(\alpha)) \geq \varepsilon\} \neq \emptyset$. Έστω $(x_\nu)_{\nu\in N}: x_\nu \in A_\nu, \nu\in N$.

Η $(x_\nu)_{\nu\in N}$ είναι ακολουθία εν E_1: $\rho_1(x_\nu,\alpha)<\frac{1}{\nu}$, $\nu\in N$. Άρα $\lim\limits_{\nu\in N} x_\nu = \alpha \xRightarrow{(iii)}$

$\lim\limits_{\nu\in N} f(x_\nu) = f(\alpha)$, ΑΤΟΠΟ! (γιατί $\forall \nu\in N$, $\rho_2(f(x_\nu),f(\alpha)) \geq \varepsilon$